ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2017 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Απόδειξη: σχολικό βιβλίο σελ: 135

Α2. α. ΨΕΥΔΗΣ

β. πχ: Αν $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Α3. Ορισμός: σχολικό βιβλίο σελ: 73

Α4. ΛΑΘΟΣ
ΣΩΣΤΟ
ΛΑΘΟΣ
ΣΩΣΤΟ
ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β:

Β1) $D_f = (0, +\infty)$ με $f(x) = \ln x$

$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ με $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$

$$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \, / \, g(x) \in D_f \}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \cdot (1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x \neq 1 \\ x \in (0,1) \end{Bmatrix}$

Άρα $D_{f\circ g} = (0,1)$

$f(g(x)) = \ln(g(x)) = \ln \dfrac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$

B2) Η $h(x) = \ln \dfrac{x}{1-x}$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων με $h'(x) = \dfrac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left(\dfrac{x}{x-1}\right)' =$

$= \dfrac{(1-x)}{x} \cdot \dfrac{(1-x+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{x(1-x)} > 0$

Άρα η $h \nearrow$ στο $(0,1)$, άρα και "1-1", άρα αντιστρέφεται.

Για $h(x) = y$ έχω ότι: $y = \ln \dfrac{x}{1-x}$

$\Leftrightarrow e^y = \dfrac{x}{1-x}$

$\Leftrightarrow e^y - x \cdot e^y = x$

$\Leftrightarrow e^y = x \cdot (e^y + 1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^y}{e^y+1} = x$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{e^y}{e^y+1}$

$0 < x < 1$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{e^y}{e^y+1} < 1$

$y \in \mathbb{R}$

Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

B3) $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

Η $\varphi \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει ακρότατα

$$\varphi''(x) = \frac{e^x \cdot (e^x+1)^2 - e^x \cdot 2 \cdot (e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} =$$

$$= \frac{(e^x+1) \cdot (e^x+1-2e^x) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x \cdot (1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

Ελέγχω $\varphi''(x) = 0 \iff 1 - e^x = 0 \iff x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ''	$+$	0	$-$
φ	$\cup$	Σ.Κ	$\cap$

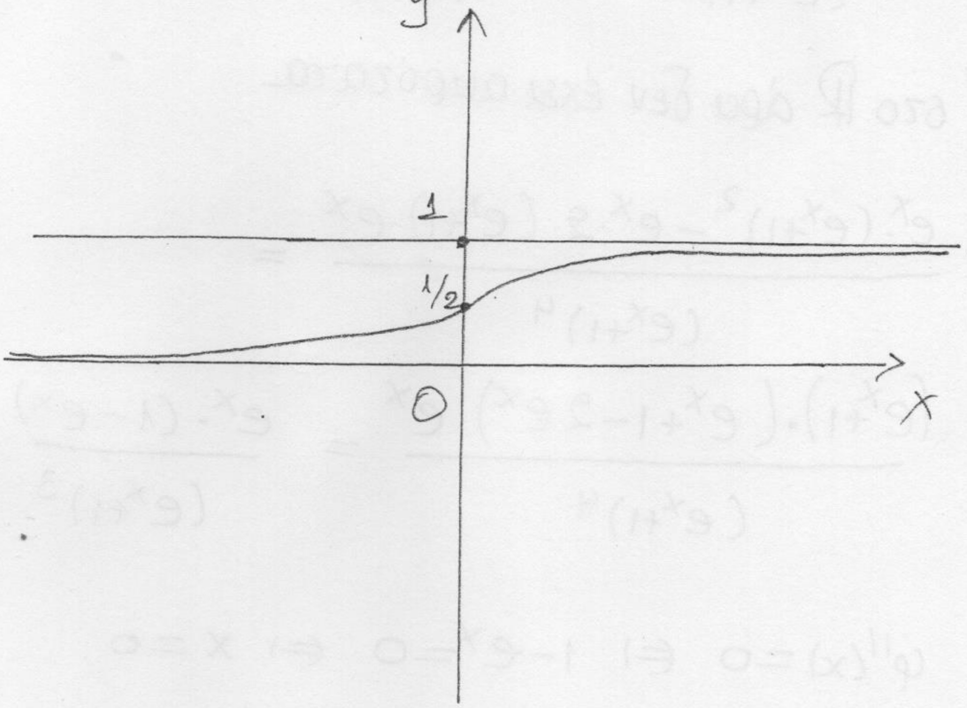
Η φ κοίλη στο $[0, +\infty)$ Παρουσιάζει Σ.Κ για $x=0$
Η φ κυρτή στο $(-\infty, 0]$ το $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.

B4) $$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Η $y=0$ $(x'x)$ οριζόντια στο $-\infty$

Η $y=1$ οριζόντια στο $+\infty$.



ΘΕΜΑ Γ:

Γ1) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής εφαπτομένης και C_f.

(ε): $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

$\Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \cdot (x - x_0)$

Το $A \in \varepsilon$ άρα: $-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) + \eta\mu x_0 - \frac{\pi}{2} = 0$

Θεωρώ $g(x) = συν x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + ημ x - \frac{\pi}{2}$.

Έχω ότι $g(0) = 0$ και $g(\pi) = 0$

$$g'(x) = -ημ x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cancel{συν x} + \cancel{συν x}$$

Για $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι $g'(x) < 0$

Για $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ είναι $g'(x) > 0$

x	0		$\pi/2$		π
g'		$-$	0	$+$	
g		↘		↗	
	Τ.Μ		Τ.Ε		ΤΜ

Άρα οι μοναδικές λύσεις είναι για $x = 0$ και $x = \pi$

με εφαπτομένες $\varepsilon_1: y = -x$

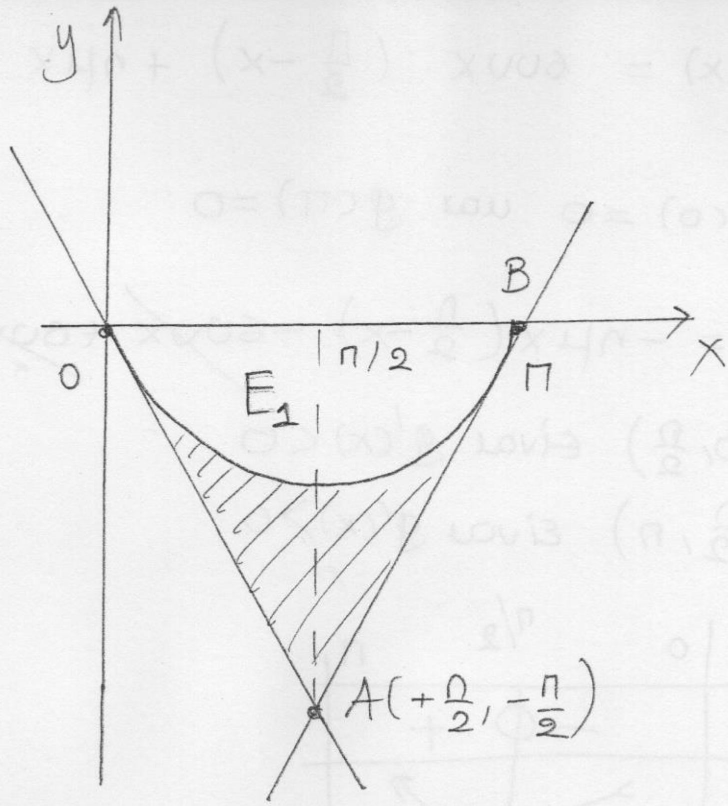
$\varepsilon_2: y = x - \pi$.

Γ_2) Έχω ότι $f''(x) = ημ x > 0$, $x \in (0, \pi)$

Άρα f κυρτή στο $[0, \pi]$, άρα η f "πάνω" απ' τις εφαπτομένες.

$f(x) \geq -x$

$f(x) \geq x - \pi$



$$E_{\text{τριγώνου } OAB} = \frac{β \cdot υ}{2} = \frac{π \cdot π/2}{2} = \frac{π^2}{4}$$

$$E_2 = \int_0^{π} |f(x)|\,dx = \int_0^{π} -f(x)\,dx = [-συνx]_0^{π} =$$

$$= -συνπ + συν0 = 2.$$

$$E_1 = E_{OAB} - E_2 = \frac{π^2}{4} - 2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{π^2}{4} - 2}{2} = \frac{π^2}{8} - 1.$$

Γ3) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi}$

$\lim\limits_{x\to\pi^-}(-\eta\mu x - x + \pi) = 0$ και $-\eta\mu x - x + \pi > 0$

κοντά στο π^- (από Γ2 έχω ότι $f(x) \geq x - \pi$)

και $\lim\limits_{x\to\pi^-}(-\eta\mu x + x) = \pi$

Άρα $\lim\limits_{x\to\pi^-}(-\eta\mu x + x) \cdot \dfrac{1}{-\eta\mu x - x + \pi} = +\infty$.

Γ4) Έχω ότι $f(x) \geq x - \pi$ με την ισότητα να ισχύει για $x = \pi$.

Άρα $f(x) > x - \pi$, $x \in [1, e]$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} > 1 - \dfrac{\pi}{x}$

Συνεπώς: $\int_1^e \dfrac{f(x)}{x}\,dx > \int_1^e \left(1 - \dfrac{\pi}{x}\right) dx$

Όμως $\int_1^e \left(1 - \dfrac{\pi}{x}\right) dx = [x - \pi \ln x]_1^e = e - \pi - 1$

Τελικά: $\int_1^e \dfrac{f(x)}{x}\,dx > e - \pi - 1$.

$\Delta_1)$ $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$

f συνεχής στο $[-1,0)$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^-} f(x)=0\\&\lim_{x\to 0^+} f(x)=e^0\cdot 0=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } x_0=0.$$

$f(x)=e^x\cdot \eta\mu x$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών στο $(0,\pi]$

Άρα η f συνεχής στο $[-1,\pi]$.

$x\in[-1,0)$: $f'(x)=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}=-\frac{4}{3}(-x)^{1/3}$

$x\in(0,\pi]$: $f'(x)=e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$

Επίσης: $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{x}=0$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=e^0\cdot 1=1$

$f'(0)$ δεν ορίζεται άρα το $x_0=0$ κρίσιμο σημείο

Ελέγχω $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0$

$\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$ $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu(-x)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + x & \text{αδύνατη} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} - x \end{cases}$$

Άρα $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ $x \in (0, \pi)$ με $0 < x \leq \pi$

$\Leftrightarrow 0 < \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \leq \pi$

Άρα $x = \frac{3\pi}{4}$ κρίσιμο σημείο. $\Leftrightarrow \frac{1}{4} < \kappa \leq \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \kappa = 1$

Δ2) Έχω ότι:

x	-1	0	$3\pi/4$	π
$-\frac{4}{3}(-x)^{1/3}$	$-$	//////	//////	
$e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$	//////	$+$	$-$	
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	$1 \searrow 0$	$\nearrow$	$e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \searrow$	0

$$f([-1, \pi]) = \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$\Delta_3)\quad E = \int_0^{\pi} |f(x)-g(x)|\,dx$

Για $x\in[0,\pi]$ $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$

$f(x)-g(x) = e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}$

Θέτω $\varphi(x) = e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}$, $x\in[0,\pi]$

Άρα: $\varphi'(x) = e^x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) - 5e^{5x}$

$= e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 5e^{4x})$

Όμως: $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 5\cdot e^{4x} < 0$

Άρα $\varphi \searrow$ διότι $\varphi'(x)<0$.

$0 \le x \le \pi \overset{\varphi \searrow}{\Longrightarrow} \varphi(0) \geq \varphi(x) \geq \varphi(\pi)$

$\Rightarrow -1 \geq \varphi(x) \geq -e^{5\pi}$

$E = \int_0^{\pi} (g(x)-f(x))\,dx = \int_0^{\pi} e^{5x}\,dx - \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x\,dx$

όπου $\int_0^{\pi} e^{5x}\,dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{5\pi}-1}{5}$

$I = \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x\,dx = [e^x \eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x\,dx =$

$= e^{\pi}\cdot \eta\mu\pi - e^0 \cdot \eta\mu 0 - \int_0^{\pi} (e^x)' \sigma\upsilon\nu x\,dx =$

$= - [e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x\,dx$.

Άρα $2I = -e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi + e^{0}\sigma\upsilon\nu 0$

$\Leftrightarrow I = \frac{e^{\pi}+1}{2}$

Άρα $E = \frac{e^{5\pi}-1}{5} - \frac{e^{\pi}+1}{2}$ τ.μ.

Δ4) Έχω ότι:

$16f(x) - (4x-3\pi)^2 = 8\sqrt{2}\,e^{3\pi/4}$

$\Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x-3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$

$\Leftrightarrow f(x) - \left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$

Όμως $0 \le f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$

άρα: $\frac{4x-3\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$.

Δεκτή αφού $f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{3\pi/4}$.