ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1) Απόδειξη: σχολικό βιβλίο σελ: 31

Α2) Ορισμός: σχολικό βιβλίο σελ: 22

Α3) Ορισμός: σχολικό βιβλίο σελ: 86-87

Α4) α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1) Έχουμε ότι: $(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0$

$\iff 3x-1=0$ ή $8x^2-6x+1=0$

- $3x-1=0 \iff x=\frac{1}{3}$
- $8x^2-6x+1=0$

$\Delta=36-32=4$

$x_{1,2}=\frac{6\pm 2}{16} \begin{cases} \xrightarrow{+} \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{-} \frac{1}{4} \end{cases}$

Συνεπώς:

$x=\frac{1}{4}$ ή $x=\frac{1}{3}$ ή $x=\frac{1}{2}$ με $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subseteq A \Rightarrow P(A\cap B)\leq P(A) \\ A\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A)\leq P(A\cup B) \end{array}\right\} P(A\cap B)\leq P(A)\leq P(A\cup B)$$

Τελικά $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Β2) Ισχύει ότι:
$$\begin{aligned} P(A'-B') &= P(A')-P(A'\cap B') \\ &= P(A')-P(A\cup B)' \\ &= 1-P(A)-(1-P(A\cup B)) \\ &= \cancel{1}-P(A)+P(A\cup B)-\cancel{1} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$P(\Delta) = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

B3) $P(E) = P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$= P(A \cup B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$

B4) $9x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 9 \cdot (-2) = 9 + 72 = 81$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{18}$ $\xrightarrow{+}$ $12/18 = 2/3$, $\xrightarrow{-}$ $-6/18 = -1/3$ απορρίπτεται

Άρα: $P(\Gamma) = \frac{2}{3}.$

Έστω ότι είναι ασυμβίβαστα:

Άρα $P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma).$

Για το ενδεχόμενο B όμως: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}.$

Συνεπώς:

$P(B \cup \Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3}$

$\Rightarrow P(B \cup \Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12} > 1$ άτοπο

Άρα δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ: Έχουμε ότι: $f_1 = 10\%$, $f_5 = 30\%$

Γ1) Επίσης: $a_3 = 108°$

$\Leftrightarrow 360° \cdot f_3 = 108$

$\Leftrightarrow f_3 = \frac{108}{360} = 0{,}3$ άρα $f_3\% = 30\%$

$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100\%$

$\Leftrightarrow 10\% + f_2\% + 30\% + f_4\% + 30\% = 100\%$

$\Leftrightarrow f_2\% + f_4\% = 30\%$. Άρα $f_2 + f_4 = 0{,}3$ (1)

Δίνεται ότι $\bar{x} = 14$.

Από τον πίνακα έχουμε ότι: $x_1 = 9$, $x_2 = 11$, $x_3 = 13$

$x_4 = 15$, $x_5 = 17$

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i$

$\Leftrightarrow 14 = 9 \cdot 0{,}1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0{,}3$

$\Leftrightarrow 14 = 0{,}9 + 11 f_2 + 3{,}9 + 15 \cdot f_4 + 5{,}1$

$\Leftrightarrow 14 - 9{,}9 = 11 f_2 + 15 f_4$

$\Leftrightarrow 4{,}1 = 11 f_2 + 15 f_4$ (2)

Από (1), (2): $\begin{cases} 11 f_2 + 15 f_4 = 4{,}1 \\ f_2 + f_4 = 0{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 = 0{,}1 \\ f_4 = 0{,}2 \end{cases}$

Τελικά $f_1\% = 10\%$, $f_2\% = 10\%$, $f_3\% = 30\%$, $f_4 = 20\%$, $f_5 = 30\%$

Γ2) $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i =$

$= 25 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}3 =$

$= 2{,}5 + 0{,}9 + 0{,}3 + 0{,}2 + 2{,}7 = 6{,}6$. $s = \sqrt{6{,}6} \simeq 2{,}57$

$CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{2,57}{14} \simeq 0,183$ ή $18,3\% > 10\%$

Δεν είναι ομοιογενείς.

Γ3) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i + x_5 v_5}{v}$

$\Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{v} + x_5 \cdot f_5 \underset{x_5=17}{\overset{f_5=0,3}{\Leftrightarrow}} \quad v = \frac{1780}{8,9} = 200$

Γ4) $b_i = \frac{1}{S_a} \cdot a_i - \frac{1}{S_a} \cdot \bar{a}$

Άρα $\bar{b} = \frac{1}{S_a} \bar{\alpha} - \frac{1}{S_a} \cdot \bar{\alpha} = 0$

Επίσης $\lambda = \frac{1}{S_a}$ άρα $S_b = \left|\frac{1}{S_a}\right| \cdot S_a = \frac{1}{\cancel{S_a}} \cdot \cancel{S_a} = 1$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1) Έχουμε ότι $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ ορθογώνιο με $AB = x$

$B\Delta = 2\rho = 10$ και από Π-Θ:

$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2$

$100 = x^2 + A\Delta^2$

$A\Delta = \sqrt{100 - x^2}$

$E(x) = AB \cdot A\Delta$

$= x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

Δ2) $f(x) = x\cdot\sqrt{100-x^2}$ $\qquad x \in (0,10)$

$$f'(x) = \sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

Λύνω $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{100-x^2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100-x^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2=50$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{50}$. Αφού $x>0$ $x=\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$f'(x)>0 \Rightarrow x<5\sqrt{2}$

$f'(x)<0 \Rightarrow x>5\sqrt{2}$

x	0		$5\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f		↗	O.M	↘	

Για $x=5\sqrt{2}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο όπου το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.

$AB^2 + A\Delta^2 = 100$

$\Leftrightarrow (5\sqrt{2})^2 + A\Delta^2 = 100$

$\Leftrightarrow A\Delta^2 = 50$

$\Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{50}$ $\quad (A\Delta > 0)$

$\Leftrightarrow A\Delta = 5\sqrt{2} = AB$ (τετράγωνο).

Δ3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{98\cdot x}=$$

$$=\frac{f'(1)}{98}=\frac{98/\sqrt{99}}{98}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}.$$

Δ4) $0<P(A-B)<1$ ανήκουμε στο $(0,5\sqrt{2})$.

Η $f \nearrow$ στο διάστημα αυτό.

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A)^2}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A)^2}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}}$$

$$\Rightarrow P(A-B)\cdot\sqrt{100-P(A-B)^2}\le P(A)\sqrt{100-P(A)^2}$$

$$\Rightarrow f(P(A-B))\le f(P(A))\Rightarrow P(A-B)\le P(A)$$

που ισχύει διότι $A-B\subseteq A$.