ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ:

ΘΕΜΑ Α:

A_1) Σχολ. βιβλίο σελ: 194
A_2) Σχολ. βιβλίο σελ: 188
A_3) Σχολ. βιβλίο σελ: 150
A_4) α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β:

B_1) $|z-4| = 2\cdot|z-1|$. Θεωρώ $z = x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$

Συνεπώς: $|x-4+yi| = 2|x-1+yi|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2+y^2 = 4\cdot[(x-1)^2+y^2]$$
$$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2 = 4x^2-8x+4+4y^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2 = 12$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$$

Άρα ο γ.τ των εικόνων του z είναι κύκλος με $K(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

B_2) α) Α.ν.δ.ο $w = \bar{w}$.

Ισχύει ότι $|z| = 2$ συνεπώς: $z\bar{z} = 4$.

Άρα $z_1\bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{4}{z_1}$ και $\bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$.

$$\bar{w} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{8/z_1}{4/z_2} + \frac{8/z_2}{4/z_1} =$$
$$= \frac{8\cdot z_2}{4z_1} + \frac{8\cdot z_1}{4\cdot z_2} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w.$$

Άρα $w \in \mathbb{R}$.

β) Ισχύει ότι: $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$

Όμως: $|z_1| = |z_2|$.

Συνεπώς: $|w| = \left| 2\frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right|$

Από τριγ. ανισότητα:

$\left|2\frac{z_1}{z_2} + 2\frac{z_2}{z_1}\right| \leq \left|2\frac{z_1}{z_2}\right| + \left|2\frac{z_2}{z_1}\right| = 2\frac{|z_1|}{|z_2|} + 2\frac{|z_2|}{2|z_1|}$

Άρα $|w| \leq 4$ και αφού $w \in \mathbb{R}$ $= 2 + 2 = 4$.

έχουμε ότι: $-4 \leq w \leq 4$.

Β3) Ισχύει ότι: $\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4$

$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2 \Leftrightarrow \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = -2$

$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = -2z_1 z_2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0$

Άρα ισχύει ότι: $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_1 = -z_2}$

$(A\Gamma) = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2i z_1| = |z_1 \cdot (1-2i)|$
$= |z_1| \cdot |1-2i| = 2 \cdot \sqrt{1^2+2^2} = 2\sqrt{5}$

$(B\Gamma) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2i z_1| = |z_1 + 2i z_1|$
$= |z_1| \cdot |1+2i| = 2 \cdot \sqrt{1^2+2^2} = 2\sqrt{5}$.

Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1) Η f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ συνεπώς:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(x^2+1)-e^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x\cdot(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}>0$$ για κάθε $x\neq 1$ και f συνεχής στο $x_0=1$

Άρα $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Επίσης: • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\frac{1}{x^2+1}\right)=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}$

$=+\infty$.

$f(D_f)=(0,+\infty)$.

Γ2) $f(e^{3-x}\cdot(x^2+1))=f(2)\overset{f\nearrow}{\underset{"1-1"}{\Longleftrightarrow}}e^{3-x}\cdot(x^2+1)=2$

$\Leftrightarrow\frac{e^3}{e^x}\cdot(x^2+1)=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$

Το $\frac{e^3}{2}\in(0,+\infty)=f(D_f)$ άρα $\exists\, x_0\in D_f$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{e^3}{2}$ και επειδή η f είναι $\nearrow$ είναι και μοναδικό.

Γ3) Για $x>0$ στο διάστημα $[2x,4x]$ ισχύει:

$t \le 4x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(t) \le f(4x)$ με την ισότητα να ισχύει για $t=4x$.

Άρα: $\int_{2x}^{4x} f(t)dt < \int_{2x}^{4x} f(4x)dt$

$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x)\int_{2x}^{4x} 1dt$

$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x)\cdot(4x-2x) = 2x\cdot f(4x)$.

Γ4) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\cdot\int_{2x}^{4x} f(t)dt & , x>0 \\ 2 & , x=0 \end{cases}$

Έχουμε ότι: $\int_{2x}^{4x} f(t)dt = \int_{\alpha}^{4x} f(t)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)dt$

με $\alpha \in (0,+\infty)$

Άρα: $g'(x) = \dfrac{\left(\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)dt\right)' x - \int_{2x}^{4x} f(t)dt \cdot x'}{x^2}$

$= \dfrac{2x(f(4x)-f(2x)) + (2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt)}{x^2}$

Όμως: $4x > 2x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(4x) > f(2x) \Leftrightarrow f(4x)-f(2x) > 0$

Άρα αφού $x>0$ ισχύει: $2x(f(4x)-f(2x)) > 0$

Από (Γ3): $\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt > 0$

Τελικά $g'(x)>0$ άρα $g \nearrow$ στο $(0,+\infty)$

Στο $x_0=0$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)\,dt}{x} \left(\frac{0}{0}\right) \underset{D.L.H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{4f(4x) - 2f(2x)}{1} =$$

$$= 4f(0) - 2(f(0)) = 4-2=2.$$

Τελικά αφού g συνεχής στο $x_0=0$ η g είναι γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1) Έχουμε ότι:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) - (-f'(x)e^{-f(x)}) = 2$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)'$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$$

Αφού $f(0)=0$ βρίσκουμε ότι:

$$e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c \Leftrightarrow c=0$$

Άρα: $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \overset{\cdot e^{f(x)}>0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} - 1 = 0$$

Λύνοντας ως προς $e^{f(x)}$ έχουμε ότι:

$e^{f(x)} = x \pm \sqrt{x^2+1}$ όπου η ρίζα $x - \sqrt{x^2+1} < 0$

άρα απορρίπτεται.

Τελικά: $e^{f(x)} = x+\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \quad , x\in\mathbb{R}$

Δ2) α) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ και $f''(x) = -\dfrac{x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$

Έχουμε ότι: $f''(x)>0$ για $x<0$ και

$f''(x)<0$ για $x>0$.

Η f κυρτή στο $(-\infty,0)$ και κοίλη στο $(0,+\infty)$ ενώ το $x_0=0$ Σ.Κ. (σημείο καμπής)

β) $E = \int_0^1 |\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - x|\,dx.$

Θεωρώ $g(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1} - x)$ με $g'(x) = f'(x)-1$

$\Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$

Για $x=0$ έχουμε $g'(0)=0$ ενώ για κάθε $x\neq 0$ ισχύει: $x^2+1>1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}<1.$

Συνεπώς $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\geq 0$.

$E = -\int_0^1 [\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - x]\,dx =$

$= \int_0^1 (x - \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$

Όμως: $\int_0^1 x\,dx = [\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx = \left[x\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 =$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1)$$

Τελικά $E = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2})$.

Δ3) Για την $f(x)$ έχουμε ότι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$

άρα $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$, συνεπώς:

Για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$. Δηλ: $|f(x)| = f(x)$

για $x \in (0, +\infty)$

Θεωρούμε $F(x) = e^{\int_0^x f^2(t)dt}$ με $F'(x) = f^2(x)\cdot F(x)$

Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\cdot x\cdot \ln f(x)\right] = k$$

Όμως: $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(f(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)/f(x)}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x^2}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$= 0\cdot 1 = 0$ Τελικά $k = 0$.

Δ4) Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = (x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt\right) + (x-3)\cdot\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)\,dt\right)$$

συνεχής στο $[2,3]$.

$$g(2) = -8 + 3\int_0^2 f^2(t)\,dt$$

$$g(3) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2)\,dt$$

Όμως από Δ2: $f(x) \leq x \quad \forall\, x \geq 0$

άρα $f^2(x) \leq x^2$ οπότε:

$$\int_0^2 f^2(x)\,dx < \int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3} \text{ άρα } g(2)<0$$

Επίσης: $f(x^2) \leq x^2$ συνεπώς:

Για $x = x^2$

$$\int_0^1 f(x^2)\,dx < \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}, \quad g(3) > 0$$

Άρα: $g(2)\cdot g(3) < 0$, συνεπώς από Bolzano

$\exists\, x_0 \in (2,3)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

·——·