

ΘΕΜΑ Α:

- A1. Απόδειξη σχολικό Βιβλίο σελ: 262
 A2. Ορισμός σχολικό Βιβλίο σελ: 141
 A3. Ορισμός σχολικό Βιβλίο σελ: 246-247
 A4. α) ΛΑΘΟΣ
 β) ΣΩΣΤΟ
 γ) ΛΑΘΟΣ
 δ) ΣΩΣΤΟ
 ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β:

Β₁) Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ έχουμε ότι $D_f = \mathbb{R}$
 παραγωγισίμη ως πηλίκο πολωνυμικών συναρτήσεων
 στο $\mathbb{R}$ με: $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} =$
 $= \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

Ελέγχω: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ελέγχω: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Ελέγχω: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\nearrow$		$\nearrow$

O.E

Η $f \searrow$ στο $(-\infty, 0]$
 Η $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$

Παρουσιάζει Ο.Ε στα $x=0$
 το $f(0) = 0$.

B₂) Η f' παρ/μη στο $\mathbb{R}$ ως πολλαπλάσιο παλινωδισμών

$$\begin{aligned} \mu\epsilon : f''(x) &= \frac{(2x)'(x^2+1)^2 - 2x[(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{2(x^4+2x^2+1) - 2x \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-6x^4 - 4x^2 + 2}{(x^2+1)^4} = \frac{-2 \cdot (3x^2-1) \cdot (x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-2 \cdot (3x^2-1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Ελέγχω $f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

Όμως:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$-2(3x^2-1)$		$-$	$+$	$-$

Συνεπώς

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f					
		$\pi\kappa$	$\pi\kappa$		

Η f κοίτη στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ και $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

Η f κυρτή στο $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$.

Σημεία καμψής για $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ το $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{4}$

και για $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ το $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{4}$

B3) Αφού $Df = \mathbb{R}$ δεν έχει μακρυφύρες
αυστηριότητες.

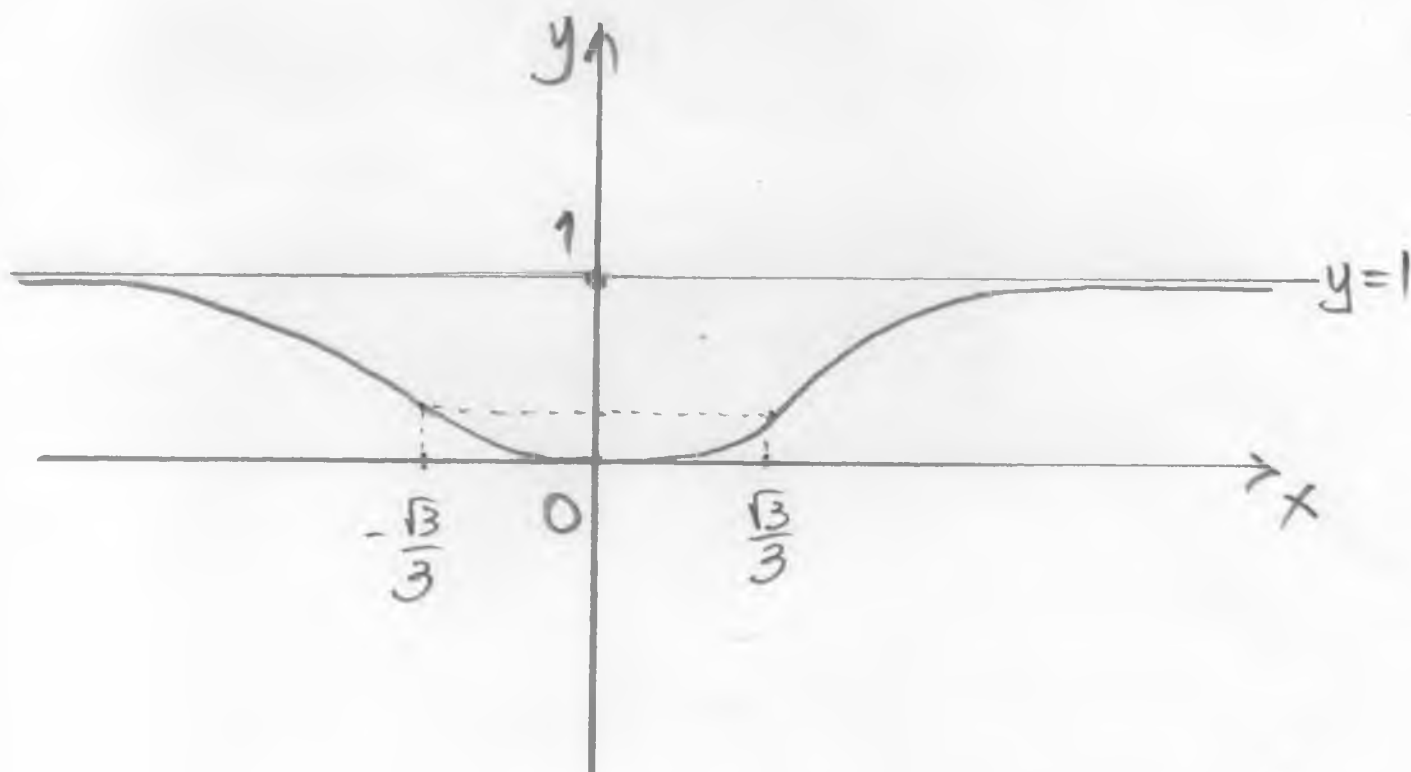
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Η $y=1$ ορίζονται στο $+\infty$ και η $y=1$ ορίζονται
στο $-\infty$ άρα δεν έχει πλάγιες.

B4)

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f'		-	- 0 +	+	
f''		-	0 +	+ 0 -	
f					



ΘΕΜΑ Γ:

$$\Gamma_1) \quad e^{x^2} - x^2 - 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Θεωρώ } h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

με προφανή ρίζα το 0

$$\text{Η } h(x) \text{ παραγώγεται στο } \mathbb{R} \text{ με } h'(x) = 2xe^{x^2} - 2x$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$$

$$\text{Ελέγχω } h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ή } e^{x^2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{x^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	-	0	+
h		0-E	

Παραρσιάζει ότι το
Ελάχιστο στα $x=0$
το $h(0)=0$ άρα
το $x_0=0$ μοναδική
ρίζα.

$$\Gamma_2) \quad \text{Έχω ότι: } f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1|$$

$$\text{Από } (\Gamma_1) \text{ έχω ότι } h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$$

$$\text{Συνεπώς: } |f(x)| = e^{x^2} - x^2 - 1.$$

Αφού f συνεχής θα έχω ότι:

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \text{ ή } f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Επίσης: } f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \in (-\infty, 0] \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \in (0, +\infty) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ή } (-\infty, 0) \\ [0, +\infty) \end{matrix}$$

$$\text{και } f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \in (-\infty, 0] \text{ ή } (-\infty, 0) \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x \in [0, +\infty) \text{ ή } (0, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Τελικά: } f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \in (-\infty, 0] \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$\Gamma_3) \quad f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \in (-\infty, 0] \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η f παρ/μη ως πράξεις παραχωρίσιμων
με $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$

Η f' παρ/μη ως δύναμενο παρ/μων
με $f''(x) = 2 \cdot (e^{x^2} - 1) + 4x^2 \cdot e^{x^2}$

Όμως $e^{x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ που ισχύει

και $f''(x) \geq 0$ με $f''(x) > 0$ για $\forall x \in \mathbb{R}$
και $x \neq 0$ και $f''(x) = 0$ για $x = 0$.

Άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

$$\Gamma_4) \quad f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \\ x \in [0, +\infty)$$

$$\text{Θεωρώ } h(x) = f(x+3) - f(x), \quad x \geq 0$$

$$\text{Η εξίσωση δίνεται: } h(|\eta\mu x|) = h(x)$$

Η h παρ/μη ως πράξεις παρ/μων με:

$$h'(x) = f'(x+3) - f'(x)$$

Για $x > 0$ είναι $x+3 > 0$ και αφού f αυξάνει
 στο $\mathbb{R}$ η f' $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0, +\infty)$

$$x+3 > x \Rightarrow f'(x+3) > f'(x) \Rightarrow h'(x) > 0 \quad \forall x \geq 0$$

Άρα h $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και "1-1".

$$\text{Τελικά } h(\ln|x|) = h(x) \Leftrightarrow |x| = x \\ \Leftrightarrow x = 0$$

ΘΕΜΑ Δ:

$$\Delta_1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln x} = 1 \quad \text{Θέτω } g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}, x \neq 0$$

$$\text{άρα } f(x) = g(x) \cdot \ln x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot \ln x) = 0 \quad \text{άρα } f(0) = 0$$

αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_0^n (f(x) + f''(x)) \ln x \, dx &= \int_0^n f(x) \ln x \, dx + \int_0^n (f'(x))' \ln x \, dx \\ &= \int_0^n f(x) \ln x \, dx + [f'(x) \ln x]_0^n - \int_0^n f'(x) (\ln x)' \, dx = \\ &= \int_0^n f(x) \ln x \, dx + f'(n) \ln n - f'(0) \ln 0 - \int_0^n f'(x) \frac{1}{x} \, dx \\ &= \int_0^n f(x) \ln x \, dx - \left\{ [f(x) \ln x]_0^n - \int_0^n f(x) (\ln x)' \, dx \right\} = \\ &= 0 = f(n) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f(n) = n.$$

$$\text{Επίσης: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{f'(0)}{1} = f'(0)$$

$$\text{Άρα } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$$

$\Delta_2)$ Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο

α) στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Από Fermat : $f'(x_0) = 0$

Όμως: $e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x$

Για $x = x_0$ έχω ότι: $e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Από το δίοτα $f'(0) = 1 \neq 0$.

β) f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ άρα διατηρεί
σταθερό πρόσημο και αφού $f'(0) = 1$
έχω ότι $f'(x) > 0$ άρα $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

$\Delta_3)$ $x > 0 \xRightarrow{f \nearrow} f(x) > f(0) = 0$ άρα $f(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\left| \frac{\eta \mu x + \theta \omega x}{f(x)} \right| \leq \frac{|\eta \mu x| + |\theta \omega x|}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

$$-\frac{2}{f(x)} \leq \left| \frac{\eta \mu x + \theta \omega x}{f(x)} \right| \leq \frac{2}{f(x)} \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$$

άρα από κ.π το όριο ισούται με μηδέν.

$$\begin{aligned} \Delta_4) \int_1^{e^n} \left(\frac{f(e^x)}{x} \right) dx &= \int_1^{e^n} f(e^x) (e^x)' dx = \\ &= [f(e^x)]_1^{e^n} = f(e^{e^n}) - f(e^1) = \pi - 0 = \pi. \end{aligned}$$

Όμως $0 < \pi < \pi^2$ άρα ισχύει η ανίσωση.

ο — ο